UNIDAD DE APRENDIZAJE II

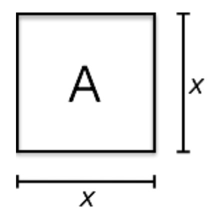
Saberes procedimentales	Saberes declarativos	
1. Multiplicar y dividir números enteros y fraccionarios 2. Utilizar las propiedad conmutativas y asociativa	**A**	Concepto de base, potencia y raíz.
	B	Propiedades de exponentes.
	C	Propiedades de raíces.
	D	Algoritmos de operaciones con exponentes y radicales.
	E	Productos Notables.

INTRODUCCIÓN

Cuadrados, cubos y exponentes

La notación exponencial se emplea para indicar cuántas veces se utilizará una cantidad como *factor*. Por ejemplo, el área A del *cuadrado* puede escribirse como

$$A = x \cdot x = x^2 \quad \text{Léase “}x\text{ cuadrada”.}$$



El exponente **2** indica que la x se utiliza dos veces como factor. De manera similar, el volumen de un V del *cubo* es

$$A = x \cdot x \cdot x = x^3 \quad \text{Léase “}x\text{ cúbica”.}$$

Esta vez, el exponente **3** indica que la

A Concepto de base, potencia y raíz

Si una variable x (denominada la **base**) va a emplearse **n** veces como factor, utilizamos la definición siguiente

$$n\ factores \rightarrow \boldsymbol{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x = x^{n \leftarrow exponente\ ó\ potencia}_{\leftarrow base}}$$

n (denominada **potencia**) es un número natural, algunas de las potencias de x son

$$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^5 \quad x \text{ a la quinta potencia}$$
$$x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4 \quad x \text{ a la cuarta potencia}$$
$$x \cdot x \cdot x = x^3 \quad x \text{ a la tercera potencia (también se lee “}x\text{ cúbica”)}$$
$$x \cdot x = x^2 \quad x \text{ a la segunda potencia (también se lee “}x\text{ cuadrada”)}$$
$$x = x^1 \quad x \text{ a la primera potencia (también se lee }x\text{)}$$

Advierta que si la base no lleva algún exponente, se supone que el exponente es **1**; es decir,

$$a = a^1, \quad b = b^1 \quad \text{y} \quad c = c^1$$

Además, para a distinta a cero, a^0 se define como 1.

El concepto de **raíz** se puede explicar con la *raíz cuadrada*, esta se relaciona con el concepto de elevar al cuadrado un número. El número 36, por ejemplo, es el cuadrado de 6 porque $6^2 = 36$. Seis, por otro lado, es la raíz cuadrada de 36; es decir, $\sqrt{36} = 6$ $\left(\sqrt{36} = \sqrt[2]{36}\right.$, solo la raíz cuadrada se puede expresear de manera implicita$\left.\right)$. De manera semejante,

$$\sqrt{16} = 4 \quad \text{porque} \quad 4^2 = 16$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3} \quad \text{porque} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$\sqrt{81}=9 \quad \text{porque} \quad (-9)^2=81$$

Observe que al ser $b^2=a$, a no puede ser negativo. De este modo, para hallar $\sqrt{a}$, encontramos el número b que cumpla con que $b^2=a$; esto es

$$\sqrt{a}=b \quad \text{es equivalente a} \quad b^2=a \quad \text{siempre y cuando} \quad a\geq 0$$

De igual manera la *raíz cúbica*, esta relacionada con el concepto de elevar a la tercera potencia (al cubo) un número. El numero 64, por ejemplo, es el cubo de 4 porque $4^3=4\cdot 4\cdot 4=64$. Cuatro por lo tanto, es la raíz cúbica de 64; es decir $\sqrt[3]{64}=4$ (El número 3 de la raíz cúbica siempre se debe ser expresado de manera explicita). De manera semejante,

$$\sqrt[3]{27}=3 \quad \text{porque} \quad 3^3=27$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{216}}=\frac{5}{6} \quad \text{porque} \quad \left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$

$$\sqrt[3]{-8}=-2 \quad \text{porque} \quad (-2)^3=-8$$

Al ser $b^3=a$, a si puede ser negativo. De este modo, para hallar $\sqrt[3]{a}$, encontramos el número b que cumpla con que $b^3=a$; esto es

$$\sqrt[3]{a}=b \quad \text{es equivalente a} \quad b^3=a \quad \text{para toda} \quad a\in\mathbb{R}$$

Observe que para raíces impares a si puede ser negativo, mientras para raíces pares no.

Ejemplo 1 Determinación de raíces

a. $\sqrt[5]{-32}$ **b.** $\sqrt{\frac{100}{121}}$ **c.** $\sqrt[4]{16}$ **d.** $\sqrt[6]{-64}$ **e.** $\sqrt{144}$ **f.** $\sqrt[3]{343}$

Solución

a. $\sqrt[5]{-32}=-2$ puesto que $-32=(-2)^5$

b. $\sqrt{\frac{100}{121}}=\frac{10}{11}$ puesto que $\frac{100}{121}=\left(\frac{10}{11}\right)^2$

c. $\sqrt[4]{16}=2$ puesto que $16=(2)^4$

d. $\sqrt[6]{-64}$ no existe, no hay potencia par que dé valor negativo

e. $\sqrt{144}=12$ puesto que $144=(12)^4$

f. $\sqrt[3]{343}=7$ puesto que $343=(7)^3$

B Propiedades de exponentes

Reglas de los exponentes

Si *m, n,* y *k* son enteros positivos, se aplican las reglas siguientes:

Regla		Ejemplo
Regla del producto para exponentes:	$x^m x^n=x^{m+n}$	$x^{-2}\cdot x^6=x^{-2+6}=x^4$
Exponente cero:	$x^0=1\ (x\neq 0)$	$9^0=1, y^0=1, (3a)^0=1$
Exponente negativo:	$x^{-n}=\frac{1}{x^n}\ (x\neq 0)$	$3^{-4}=\frac{1}{3^4}=\frac{1}{81}, y^{-7}=\frac{1}{y^7}$

Regla del cociente para exponentes:	$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\ (x \neq 0)$	$\frac{p^8}{p^3} = p^{8-3} = p^5$
Regla de potencia para exponentes:	$(x^m)^n = x^{m\cdot n}$	$(a^3)^9 = a^{3\cdot 9} = a^{27}$
Regla de potencia para productos:	$(x^m y^n)^k = x^{mk} y^{nk}$	$(x^4y^3)^4 = x^{4\cdot 4}y^{3\cdot 4} = x^{16}y^{12}$
Regla de potencia para cocientes:	$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}\ (y \neq 0)$	$\left(\frac{a^3}{b^4}\right)^8 = \frac{a^{3\cdot 8}}{b^{4\cdot 8}} = \frac{a^{24}}{b^{32}}$
Conversión de exponente positivo en negativo:	$\frac{x^{-m}}{y^{-n}} = \frac{y^n}{x^m}$	$\frac{x^{-7}}{y^{-9}} = \frac{y^9}{x^7}$

C Propiedades de radicales

Reglas de los radicales

Si n y m son enteros positivos, se aplican las reglas siguientes:

Regla		Ejemplo
Regla de radicales para productos:	$\sqrt[n]{x\cdot y} = \sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}$	$\sqrt[3]{x^3y^2} = \sqrt[3]{x^3}\cdot\sqrt[3]{y^2} = x\cdot\sqrt[3]{y^2}$, $\sqrt[5]{32y} = \sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{y} = 2\cdot\sqrt[5]{y}$
Regla de radicales para cocientes:	$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[4]{\frac{x}{y^4}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y^4}} = \frac{\sqrt[4]{x}}{y}$, $\sqrt[3]{\frac{x}{8}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{2}$
Regla de radicales para potencias:	$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$	$\sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3$, $\sqrt[4]{x} = x^{1/4}$
Racionalización del denominador:	$\frac{x}{\sqrt[n]{y^m}} = \frac{x}{\sqrt[n]{y^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{y^{n-m}}}{\sqrt[n]{y^{n-m}}} = \frac{x\cdot\sqrt[n]{y^{n-m}}}{y}$	$\frac{x}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{x}{\sqrt[3]{y^2}}\cdot\frac{\sqrt[2]{y^{3-2}}}{\sqrt[3]{y^{3-2}}} = \frac{x\cdot\sqrt[3]{y}}{y}$

D Algoritmos de operaciones con exponentes y radicales

Ejemplo 1 Simplificar usando las reglas del exponente negativo, producto, cociente para exponentes.

a. $\frac{(3xy)(2x^2y)}{4xy^4}$ **b.** $\frac{2ab(ab^2)^{-1}}{a^3b^2}$

Solución

a. $\frac{(3xy)(2x^2y)}{4xy^4}$

$= \frac{6x^3y^2}{4xy^4}$ Regla del producto para exponentes

$= \frac{3x^{3-1}y^{2-4}}{2}$ Regla del cociente para exponentes

$= \frac{3x^2}{2y^2}$ Regla del exponente negativo

b. $\frac{2ab(ab^2)^{-1}}{2a^3b^2}$

$= \frac{2ab}{2a^3b^2(ab^2)}$ Regla del exponente negativo

$= \frac{2ab}{2a^4b^4}$ Regla del producto para exponentes

$= \frac{2a^{1-4}b^{1-4}}{2}$ Regla del cociente para exponentes

$= \frac{1}{a^3b^3}$ Regla del exponente negativo

Ejemplo 2 Simplificar usando conversión de exponente negativo, reglas de potencia para producto, cociente y exponente.

a. $\frac{(2x^2y)^{-2}}{(y^4)^{-3}}$ **b.** $\left(\frac{6ab^4}{2a^2b^2}\right)^{-2}$ **b.** $\left(\frac{6ab^4}{2a^2b^2}\right)^{-2}$

Solución

a. $\frac{(x^2y)^{-2}}{(y^4)^{-3}}$

$= \frac{(y^4)^3}{(x^2y)^2}$ Conversión de exponente negativo

$= \frac{y^{12}}{(x^2y)^2}$ Regla de la potencia para exponentes

$= \frac{y^{12}}{x^4y^2}$ Regla de la potencia para producto

$= \frac{y^{10}}{x^4}$ Regla del cociente para exponentes

$= \left(\frac{6a^{1-2}b^{4-2}}{2}\right)^{-2}$ Regla del cociente para exponentes

$= \left(\frac{6a^{-1}b^2}{2}\right)^{-2}$ Regla del exponente negativo

$= \frac{(3b^2)^{-2}}{(a)^{-2}}$ Regla de la potencia para cociente

$= \frac{(a)^2}{(3b^2)^2}$ Conversión de exponente negativo

$= \frac{a^2}{9b^4}$ Regla de la potencia para exponentes y producto

Ejercicios Simplificar

1. $\frac{6x^{-2}y}{3x^3y^2}$ **2.** $\frac{(3xy)^{-1}(2x^4y)}{4xy^4}$ **3.** $\left(\frac{3(ab^4)^2}{12a^3b^2}\right)^{-3}$ **4.** $\frac{(3ab)^3}{9\,a^{-3}b^2(a^5b^2)}$ **5.** $\frac{(2x^4y)^{-2}}{(y^2)^3}$

Ejemplo 3 Uso de reglas de radicales con reglas de potencias para simplificar.

a. $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^4}{4(a^4b^2)^2}}$ **b.** $\frac{\sqrt[4]{16x^4y^2}}{2x^2y^{1/4}}$

Solución

a. $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^4}{4(a^4b^2)^2}}$

$= \sqrt[3]{\frac{8a^2b^4}{4a^8b^4}}$ Regla de la potencia para exponentes

$= \sqrt[3]{\frac{8a^{2-8}b^{4-4}}{4}}$ Regla del cociente para exponentes

$= \sqrt[3]{\frac{2b^0}{a^6}}$ Exponente cero

$= \frac{\sqrt[3]{2(1)}}{\sqrt[3]{a^6}}$ Regla de radicales para cocientes

$= \frac{\sqrt[3]{2}}{a^{6/3}}$ Regla de radicales para potencias

$= \frac{\sqrt[3]{2}}{a^2}$ Simplificación de fracción de potencia

b. $\frac{\sqrt[4]{16x^4y^2}}{2x^2y^{1/4}}$

$= \frac{\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{x^4}\cdot\sqrt[4]{y^2}}{2x^2y^{1/4}}$ Regla de radicales para productos

$= \frac{2xy^{2/4}}{2x^2y^{1/4}}$ Regla de radicales para potencias

$= \frac{2y^{(2-1)/4}}{2x^{2-1}}$ Regla del cociente para exponentes

$= \frac{y^{1/4}}{a}$ División de constantes

$= \frac{\sqrt[4]{y}}{x}$ Regla de radicales para potencias

Ejercicios Simplificar

1. $\sqrt[4]{\frac{3a^4b^4}{36a(a^4b^2)^{-2}}}$ **2.** $\frac{\sqrt[3]{8a^4b}}{4ab^{3/2}}$ **3.** $\left(\frac{3(xy^4z^3)^2}{6x^3y^2z}\right)^{1/2}$ **4.** $\frac{\sqrt[4]{16x^4z^3}}{\sqrt[3]{8x^5yz}}$ **5.** $\frac{18x^4z^3}{\sqrt[3]{8x^6y}}$

Ejemplo 4 Racionalización del denominador

a. $\frac{9}{\sqrt[3]{x}}$ **b.** $\frac{2y}{\sqrt[4]{12}}$ **c.** $\frac{4b^{3/5}}{\sqrt[5]{a^2}}$ **d.** $\frac{\sqrt{a}}{b^2}$

Solución

a. $\frac{9}{\sqrt[3]{x}} = \frac{9}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^{3-1}}}{\sqrt[3]{x^{3-1}}} = \frac{9}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{9\sqrt[3]{x^2}}{x}$

b. $\frac{2y}{\sqrt[4]{12}} = \frac{2y}{\sqrt[4]{12}} \cdot \frac{\sqrt[4]{12^{4-1}}}{\sqrt[4]{12^{4-1}}} = \frac{2y}{\sqrt[4]{12}} \cdot \frac{\sqrt[4]{12^3}}{\sqrt[4]{12^3}} = \frac{2y\sqrt[4]{12^3}}{12} = \frac{12^{3/4}y}{6}$

c. $\frac{4b^{3/5}}{\sqrt[5]{a^2}} = \frac{9}{\sqrt[5]{a^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^{5-2}}}{\sqrt[5]{x^{5-2}}} = \frac{4b^{3/5}}{a^{2/5}} \cdot \frac{a^{3/5}}{a^{3/5}} = \frac{4b^{3/5}a^{3/5}}{a^{5/5}} = \frac{\sqrt[5]{(ab)^3}}{a}$

d. $\frac{\sqrt{a}}{b^2} = \frac{\sqrt{a}}{b^2} \cdot \frac{\sqrt{a^{2-1}}}{\sqrt{a^{2-1}}} = \frac{\sqrt{a}}{b^2} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{a^{1/2}a^{1/2}}{b^{4/2}a^{1/2}} = \frac{a}{\sqrt{ab^4}}$

* También se puede aplicar en el numerador.

Ejercicios Racionalizar

1. $\frac{6}{\sqrt[4]{(3x)^2}}$ **2.** $\frac{2y^3}{\sqrt[5]{9}}$ **3.** $\frac{\sqrt{4x}}{2b^3}$ **4.** $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{b^2}$ **5.** $\frac{2y}{\sqrt[3]{15}}$

D Productos Notables

Se llaman productos notables ciertas multiplicaciones que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, realizar la operación.

<u>Binomio al cuadrado</u>

Elevar al cuadrado $a + b$ equivale a muktiplicar dos veces este binomio por si mismo, e decir, $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

Al realizar la multiplicación se tiene:

$$\begin{aligned}(a + b)(a + b) = a^2 &+ ab \\ &+ab + b^2 \\ \hline &\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}\end{aligned}$$

Lo anterior traducido del lenguaje algebraico al común:

Binomio al cuadrado	El cuadrado de la suma de dos términos es igual al cuadrado del primer término más el doble producto del primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término.

NOTA: recuerda que la operación de suma incluye la adición y la sustracción.

Ejemplos Obtener el resultado de los siguientes binomios al cuadrado.

a. $(2x^2 + y)^2$ **b.** $\left(\frac{4}{7} + x\right)^2$ **c.** $(3a + 2b)^2$

Solución

a. $(\mathbf{2x^2+y})^2$

$$(2x^2+y)^2=(2x^2)^2+2(2x^2)(y)+(y)^2$$
$$=\mathbf{4x^4+4x^2y+y^2}$$

b. $\left(\frac{4}{7}+x\right)^2$

$$\left(\frac{4}{7}+x\right)^2=\left(\frac{4}{7}\right)^2+2\left(\frac{4}{7}\right)(x)+(x)^2$$
$$=\mathbf{\frac{16}{49}+\frac{8}{7}x+x^2}$$

c. $(3a+2b)^2$

$$(3a+2b)^2=(3a)^2+2(3a)(2b)+(2b)^2$$
$$=\mathbf{9a^4+12ab+4b^2}$$

Ejercicios Obtener el resultado de los siguientes binomios al cuadrado por simple inspección.

1. $(a+3)^2$ **2.** $(\frac{x}{8}+y)^2$ **3.** $(\frac{2}{3}a^3+b^4)^2$ **4.** $(10x^3-9xy^5)^2$ **5.** $(-3x^2+x^3)^2$

Binomios Conjugados

Es el producto de binomios con signo contrario, es decir, el producto $(a+b)(a-b)$, al efectuar esta multiplicación se obtiene:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b)=a^2&+ab\\ -ab&-b^2\\ \boxed{\mathbf{a^2}\quad\quad&\mathbf{-\ b^2}}\end{aligned}$$

Lo anterior traducido del lenguaje algebraico al común:

Binomio conjugado	El cuadrado del término que tiene el mismo signo (llamado idéntico), menos el cuadrado del término con signo diferente (llamado simétrico).

Ejemplos

a. $(3b+2a)(3b-2a)$ **b.** $(-3b-2a)(-2a+3b)$

Solución

a. $(3b+2a)(3b-2a)$
$=(3b)^2-(2a)^2$
$=9b^2-4a^2$

b. $(-3b-2a)(-2a+3b)$
$=-(3b)^2+(2a)^2$
$=-9b^2+4a^2$

NOTA: No importa el orden en el que aparezcan los términos de los binomios, en tanto sean los mismos y no de ellos tenga el signo contrario en este caso $+3b$ y $-3b$.

Ejercicios

1. $(x+y)(x-y)$ **2.** $(\frac{n}{2}-3)(\frac{n}{2}+3)$ **3.** $(-8xy+1)(1+8xy)$ **4.** $(a^2+b^5)(a^2-b^5)$ **5.** $(y^2-3y)(y^2+3y)$

Binomio al Cubo

Elevar al cubo $a+b$ equivale a multiplicar tres veces este binomio por sí mismo:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$$

Por binomio al cuadrado tenemos que $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$, por lo que solo nos falta multiplicar una vez por $(a+b)$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}(a^2+2ab+b^2)(a+b)&=\\ a^3+2a^2b+&\ \ ab^2\\ +\ a^2b+&2ab^2+b^3\\ \boxed{\mathbf{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}}\end{aligned}$$

Lo anterior traducido del lenguaje algebraico al común:

Binomio al cubo	El cubo del primer término más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo más el triple del producto del primero por el cuadrado del segundo término más el cubo del segundo término.

Ejemplos

a. $(2x^2+y)^3$ **b.** $(5m-4n^2)^3$

Solución

a. $(2x^2+y)^3$
$=(2x^2)^3+3(2x^2)^2(y)+3(2x^2)(y)^2+(y)^3$
$=8x^6+12x^4y+6x^2y^2+y^3$

b. $(5m-4n^2)^3$
$=(5m)^3+3(5m)^2(-4n^2)+3(5m)(-4n^2)^2+(-4n^2)^3$
$=125m^3-300m^2n^2+240mn^4-16n^6$

Ejercicios Obtener el resultado de los siguientes binomios al cubo

1. $(a+1)^3$ **2.** $(4w^2-1)^3$ **3.** $\left(\frac{x}{2}-3y\right)^3$ **4.** $\left(-5xy-\frac{2z}{3}\right)^3$ **5.** $(7a+3b^3)^3$

Binomios con un término en común

Al analizar el producto más general que resulta de multiplicar dos binomios con un término común:

$$(ax+m)(ax+n)=$$
$$a^2x^2+amx$$
$$+\ anx+mn$$
$$\boxed{\boldsymbol{a^2x^2+(m+n)ax+mn}}$$

Se concluye que el resultado de multiplicar dos binomios que tienen un término común es:

Binomio con término común	El cuadrado del término común más la suma algebraica de los términos no comunes por el común, más el producto de los no comunes.

Ejemplos

a. $(x+6)(x+10)$ **b.** $(5a+7)(5a-11)$ **c.** $(2m-5n)(2m-7n)$

Solución

a. $(x+6)(x+10)$
$=(x)^2+(6+10)(x)+(6)(10)$
$=x^2+16x+60$

b. $(5a+7)(5a-11)$
$=(5a)^2+(7-11)(5a)+(7)(-11)$
$=25a^2-20a-77$

c. $(2m-5n)(2m-7n)$
$=(2m)^2+(-5n-7n)(2m)+(-5n)(-7n)$
$=4m^2-24mn+35n^2$

Ejercicios Obtener el resultado de los siguientes binomios con término común

1. $(x+7)(x+2)$ **2.** $(c^2-11)(c^2+12)$ **3.** $(a+8)(a-3)$ **4.** $(4m^2-1)(4m^2+9)$ **5.** $\left(\frac{b}{3}-9\right)\left(\frac{b}{3}-4\right)$

EJERCICIOS ADICIONALES